Tutorato Analisi I - 27/10/23

Calcolo di limiti

1) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 43x + 12}{6x^2 + 3 - 7x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}}{-7\cancel{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}$$

2) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9}$$ [Foglio 3: 1, b)]

Sostituisco $x = -1$, ottengo $\dfrac{-1+3-2}{1-2-8+18-9} = \dfrac{0}{0}$ FORMA INDETERMINATA

Questo vuol dire che $(x+1)$ compare nella fattorizzazione di $x^3 - 3x - 2$ e di $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$.

Scomponiamo i polinomi:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(\dots)$$

- METODO DI RUFFINI

$1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 3\cdot x \;\; -2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

-1 è radice

$x^2 - x - 2$

$x^2 - x - 2$ ha come radice -1 (di nuovo)

$\hookrightarrow (-1)^2 + 1 - 2 = 0$

TRINOMIO NOTEVOLE $\rightsquigarrow (x+1)(x-2)$

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2).$$

Denominatore:

$$x^4+2x^3-8x^2-18x-9=(x+1)(x^3+x^2-9x-9)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -8 & -18 \;\;\;\; -9 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 2 \quad -8 & -18 & -9 \\
-1 & & -1 \quad -1 & 9 & 9 \\
\hline
 & 1 & 1 \quad -9 & -9 & 0
\end{array}$$

Sostituiamo -1 per vedere se è ancora radice

$$-1+1+9-9=0 \Rightarrow -1 \text{ è radice!}$$

Scompongo ancora

$$x^3+x^2-9x-9=(x+1)(x^2-9):$$

$$x^3+x^2-9x-9=$$

$$=x^2(x+1)-9(x+1)=$$

$$=(x+1)(x^2-9)$$

oppure ancora

$$\left[\begin{array}{r|rr|r}
 & 1 & 1 \quad -9 & -9 \\
-1 & & -1 \quad 0 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 \quad -9 & 0
\end{array}\right]$$

→ Tornando al limite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3-8x^2-18x-9}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)^2}(x-2)}{\cancel{(x+1)^2}(x^2-9)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-9}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}.$$

Alternativa più veloce (?) ma meno intuitiva:

- SAPENDO CHE -1 È RADICE, TROVARE UNA SCOMPOSIZIONE

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1) \cdot \text{polinomio}$$

$$x^3 \underbrace{- x - 2x - 2}_{\text{cerco di produrre un fattore } x+1} = x^3 - x - \underbrace{2(x+1)}_{} = x(x^2-1) - 2(x+1) =$$

$$= x(x-1)(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(x(x-1)-2) =$$

$$= (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x+1)(x-2).$$

[
$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = \overbrace{x^4 + 2x^3 + x^2}^{x^2(x^2+2x+1)} - x^2 - 8x^2 - 18x - 9 =$$

$$= x^2(x+1)^2 - 9\underbrace{(x^2+2x+1)}_{(x+1)^2} = (x+1)^2(x^2-9).$$
]

3) $$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} + 6x \right)$$

[
$x^2 + 4x \geq 0 \iff \underbrace{x \leq -4}_{\text{ha senso fare il } \lim_{x\to-\infty}} \lor x \geq 0$

$x(x+4) \geq 0$
]

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + 6x \right) =$$

- $a, b \geq 0$: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2} \underbrace{\sqrt{1 + 4/x}}_{>0 \text{ perché } 4/x \to 0} + 6x \right) =$$

- $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{\boxed{x \to -\infty}} \left(|x| \sqrt{1 + 4/x} + 6x \right) =$$

$x < 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 6x \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \underbrace{\left(6 - \sqrt{\underbrace{1+4/x}_{\to 1}}\right)}_{\to 5} = -\infty .$$

L'idea è : $\sqrt{x^2+4x} = |x| \underbrace{\sqrt{1+4/x}}_{\to 1}$

monomio di grado massimo

$\sqrt{x^2+4x}$ si comporta (per $x \to \pm\infty$) come $|x|$, ma

ATTENZIONE! Non si può sostituire $\sqrt{x^2+4x}$ con $|x|$:

4) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{1+4/x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \left(\underbrace{1 - \sqrt{1+4/x}}\right)$$

$-\infty \cdot 0 \rightsquigarrow$ non funziona più!

Dobbiamo trovare un'altra strada!

Moltiplico e divido per una stessa quantità: faccio "scomparire" la $\sqrt{\ }$ al numeratore

$$\big(\overbrace{\sqrt{x^2+4x}}^{a} + \overbrace{x}^{b}\big) \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+4x}}^{a} - \overbrace{x}^{b}}{\sqrt{x^2+4x} - x} = \frac{\overbrace{\cancel{x^2}+4x}^{a^2} - \overbrace{\cancel{x^2}}^{b^2}}{\sqrt{x^2+4x} - x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} - x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4\cancel{x}}{-\cancel{x}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+4/x}}_{\to 1}+1\right)}_{\to 2}} = \frac{4}{-2} = -2.$$

5) $$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$$

(Sostituisco $x=\pi$, trovo $\frac{0}{0}$ ...)

IDEA: ricondursi al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$t = x-\pi$: se $x\to\pi$, allora $t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(-\sin t)}{t} =$$

$$= -\underbrace{\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}}}_{=1} = -1.$$

Ricordare: $\lim_{x\to x_0} (a\cdot f(x)) = a\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

a costante

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$ [Foglio 3 : 1, i)]

(Sostituisco $x=0$, trovo $\frac{0}{0}$ ...)

- Cambio di variabile $t = \sin x$

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{\arcsin(t)}$ non sembra molto conveniente ...

$\searrow t = \sin x \in [-1, 1]$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} =$

$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$ ORA è conveniente $t = \sin x$ (solo per il primo fattore)

$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

Idea : $\frac{\sin(\sin x)}{x}$ per $x \to 0$

$\boxed{\frac{\sin(\sin x)}{x}} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}}_{\to 1} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}}$

se $x \to 0$ allora $t = \sin x \to 0$

In generale, se $f(x), g(x)$ sono funzioni $\neq 0$ t.c. $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, allora:

$\underbrace{\frac{\sin f(x)}{g(x)}} = \underbrace{\frac{\sin f(x)}{f(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}$

basta fare il limite di